EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* …018**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele A(1,-1), B(4,3).

(4p) **b)** Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(1,-1)$ față de punctul $B(4,3)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$.

(4p) **d)** Să se determine punctul de pe dreapta $d: x-3y+6=0$ care are coordonatele egale.

(2p) **e)** Să se determine soluțiile complexe ale ecuației $x^2+4=0$.

(2p) **f)** Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{2+3i}{(2-i)^2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuația $1-3x\geq 10$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\log_2\frac{1}{2}+\log_3\frac{1}{3}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_3(x^2+5)=2$.

(3p) **d)** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2\}\to\{1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $n!<2^{n+1}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\text{arctg}x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4n+5}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$.

(4p) **b)** Să se verifice identitatea $X^2-5I_2=\left(X-\sqrt{5}I_2\right)\left(X+\sqrt{5}I_2\right)$, $\forall X\in M_2(\mathbf{Q})$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă polinomul $f\in\mathbf{Q}[X]$, $f=X^2-(a+d)X+ad-bc$ are o rădăcină egală cu $\sqrt{5}$, atunci $a+d=0$ şi $ad-bc=-5$.

(2p) **d)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $B\in M_2(\mathbf{Q})$, cu proprietatea $B^2=5I_2$.

(2p) **f)** Să se arate că $\det(XY)=\det(X)\cdot\det(Y)$, $\forall X,Y\in M_2(\mathbf{Q})$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $\det\left(X^2-5I_2\right)=0$, unde $X\in M_2(\mathbf{Q})$, atunci $X^2=5I_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(x)=f(-x), \forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(x)\geq 2$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}$.

(2p) **g)** Să se rezolve în mulţimea $(0,\infty)$ ecuaţia $f(x)+f\left(x^{27}\right)=f\left(x^5\right)+f\left(x^{2007}\right)$.